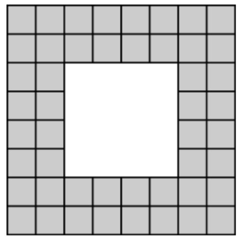
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2017—2018 уч. г. ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП.

8 КЛАСС

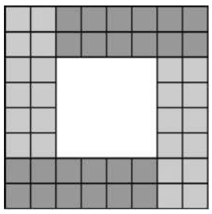
Задания, ответы и критерии оценивания

1. (7 баллов) В рамке 8 x 8 шириной в 2 клетки (см. рисунок) всего 48 клеточек. Сколько клеточек в рамке 254 x 254 шириной в 2 клетки?



Ответ. 2016.

Решение. *Первый способ.* Разрежем рамку на четыре одинаковых прямоугольника так, как показано на рисунке. Ширина прямоугольников равна ширине рамки, т. е. 2 клетки. Длина каждого прямоугольника на 2 меньше стороны рамки: 254 — 2 = 252 клетки. Тогда площадь одного прямоугольника равна 2 • 252 = 504. А значит, всего в рамке 4 • 504 = 2016 клеток.



Второй способ. Площадь рамки можно получить, если из площади квадрата 254 x 254 вычесть площадь внутреннего квадрата. Сторона внутреннего квадрата на 4 клетки меньше стороны большого. Значит, площадь рамки равна $254^2 - 250^2 = (254 - 250)(254 + 250) = 4 - 504 = 2016$.

Замечание. Если обозначить сторону рамки через n, то можно доказать (например, описанными выше способами), что её площадь будет равна 8n — 16 клеток.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка — 3 балла.
- Верное рассуждение, но допущена ошибка в оценке размеров (например, во втором способе ошибочно считается, что внутренний квадрат имеет сторону на 2 клетки меньше, чем большой) — 2 балла.
- Только верный ответ — 1 балл.

2. (7 баллов) Аня перемножила 20 двоек, а Ваня перемножил 17 пятёрок. Теперь они собираются перемножить свои огромные числа. Какова будет сумма цифр произведения?

Ответ. 8.

Решение. Всего перемножается 20 двоек и 17 пятёрок. Переставим сомножители, чередуя двойки и пятёрки. Получится 17 пар 2 • 5 и ещё три двойки, дающие в произведении 8. Итак, число 8 нужно 17 раз умножить на 10. Получается число,

состоящее из цифры 8 и 17 нулей. Сумма цифр равна 8. Другой способ записи тех же рассуждений можно получить, используя свойства степеней:
$2^{20} \bullet 5^{17} = 2^3 \bullet 2^{17} \bullet 5^{17} = 8 \bullet (2 \bullet 5)^{17} = 8 \bullet 10^{17} = 800\,000\,000\,000\,000\,000$.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верный ход решения, получено верное произведение, но сумма цифр не указана — 5 баллов.
- Сделана группировка двоек и пятёрок по парам, дающим десятки, но ответ не получен или получен неверно — 2 балла.

3. (7 баллов) В выражении $\dfrac{Р \bullet А \bullet З + Р \bullet Е \bullet З \bullet А \bullet Й}{С \bullet Р \bullet А \bullet З \bullet У}$ замените каждую из букв *Р, А, З, Е, Й, С, У* на какую-то из цифр от 1 до 9 (одинаковые буквы — на одинаковые цифры, разные буквы — на разные цифры) так, чтобы значение выражения получилось наибольшим. *Покажите, как нужно расставить цифры, вычислите значение вашего выражения и объясните, почему оно наибольшее.*

Ответ. Наибольшее значение равно 36,5 и достигается, например, при *С* = 1, У = 2, *Е* = 9, *Й* = 8, *Р* = 4, *А* = 5, *З* = 6.

Решение. Вынесем за скобки общий множитель в числителе дроби и сократим: $\dfrac{Р \cdot А \cdot З \cdot (1 + Е \cdot Й)}{Р \cdot А \cdot З \cdot С \cdot У} = \dfrac{1 + Е \cdot Й}{С \cdot У}$. Поскольку каждая буква заменяет одну цифру, $С \cdot У \geq 2$ и $Е \cdot Й \leq 72$. Поэтому $\dfrac{1 + Е \cdot Й}{С \cdot У} \leq \dfrac{1 + 72}{2} = 36{,}5$. Осталось как-нибудь заменить все буквы *Р, А, З, Е, Й, С, У* на цифры так, чтобы значение 36,5 достигалось. Для этого необходимо поставить вместо *С* и *У* цифры 1 и 2 в любом порядке, вместо *Е* и *Й* — цифры 8, 9 в любом порядке, а оставшиеся буквы *Р*, *А* и *З* заменить на какие-либо из оставшихся цифр, например, так: *Р* = 4, *А* = 5, *З* = 6.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное решение, но ничего не написано про цифры, которыми нужно заменить буквы Р, *А* и З, — 6 баллов.
- Верно и обосновано найдено, какими цифрами нужно заменить *С, У, Е, Й,* но допущена арифметическая ошибка и получен неверный ответ — 4 баллов.
- Приведены верный ответ и верный пример расстановки цифр, но не доказано, что это значение наибольшее (сокращение дроби не выполнено), — 3 балла.
- Верно выполнено сокращение дроби, но дальнейшие рассуждения отсутствуют или неверны — 2 балла.
- Приведён верный пример расстановки цифр, значение выражения не найдено или найдено неверно, его максимальность не доказана — 1 балл.

4. (7 баллов) В комнате 10 ламп. Петя сказал: «В этой комнате есть 5 включённых ламп». Вася ему ответил: «Ты не прав». И добавил: «В этой комнате есть три выключенные лампы». Коля же сказал: «Включено чётное число ламп».

Оказалось, что из четырёх сделанных утверждений только одно верное. Сколько ламп включено?

Ответ. 9.

Решение. Первое и третье утверждения одновременно не могут быть оба неверными, иначе в комнате было бы меньше пяти включённых ламп и меньше трёх выключенных, т. е. всего меньше восьми ламп, что противоречит условию. Первое и второе утверждения также не могут быть одновременно неверными. Значит, среди утверждений 1 и 3 есть верное, и среди утверждений 1 и 2 есть верное. Поскольку верное утверждение всего одно, это утверждение 1, а остальные утверждения неверны.

Значит, в комнате меньше трёх выключенных ламп (так как утверждение 3 неверно). Тогда включённых ламп хотя бы восемь, причём их количество нечётно (так как утверждение 4 неверно). Значит, их девять.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное и полное решение, но дан ответ не на тот вопрос («1 выключенная лампа») — 6 баллов.
- Сказано, но не доказано, что верным может быть только утверждение 1, зато потом из этого факта верно выведено, что включённых ламп 9, — 3 балла.
- Объяснено, что верным может быть только утверждение 1, но далее сделана одна ошибка при построении отрицаний к одному из утверждений 2, 3, 4, приводящая к неверному ответу (например, где-то «включено» перепутано с «выключено» или «чётное» не превращено в «нечётное»), — 3 балла.
- Объяснено, что верным может быть только утверждение 1, но дальнейшие рассуждения неверны или в них сделано не менее двух ошибок при построении отрицаний — 2 балла.
- Приведён верный ответ, и без обоснования указано, что при этом верно только утверждение 1, но не объяснено, почему не может быть верно другое утверждение и почему не возможен какой-либо другой ответ, — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

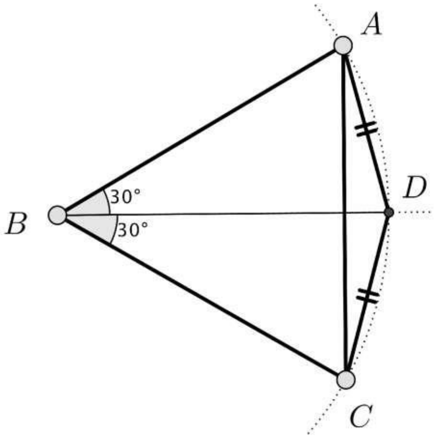
5. (7 баллов) Незнайка измерил длины сторон и диагоналей своего четырёхугольного земельного участка, записал в блокнот результаты шести измерений и тут же забыл, какие числа относились к диагоналям, а какие — к сторонам. Потом он заметил, что среди написанных чисел есть четыре одинаковых, а два оставшихся числа тоже равны между собой. Незнайка обрадовался и сделал вывод, что его участок — квадрат. Обязательно ли это так? *Если ответ «да», то утверждение нужно доказать, если ответ «нет» — привести опровергающий пример и его обосновать.*

Ответ. Нет, необязательно.

Решение. Построим равносторонний треугольник ABC и на биссектрисе его угла B отложим отрезок BD, равный AB. В четырёхугольнике $ABCD$ имеем $AB = BC = CA = BD$ (по построению) и $AD=DC$ (например, из равенства треугольников BAD и BCD по двум сторонам и углу между ними). Очевидно, что построенный четырёхугольник не является квадратом (например, так как угол ABC равен 60°). Участок Незнайки мог иметь форму этого четырёхугольника. *Замечание.*

Возможен и участок невыпуклой формы, обладающий теми же свойствами.
Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Правильная, хорошо читаемая картинка, симметричная относительно одной из диагоналей, на которой отмечены равные отрезки (четыре одних и два других), но построение никак не описано — 3 балла.
- Указано, что могут выполняться равенства $AB = BC = CA = BD$ и $AD = DC$, но ни чертежа, ни описания конструкции нет, либо есть только невнятная картинка с правильно указанными равными отрезками, из которой не очевидно, почему такие равенства отрезков можно получить, — 2 балла.



6. (7 баллов) Четыре блохи играют в чехарду на большом листе клетчатой бумаги.
Каждую секунду одна из блох перепрыгивает через какую-то другую и, летя над той же прямой, пролетает расстояние, вдвое большее, чем было между блохами до прыжка. Сейчас блохи сидят в четырёх вершинах одной клетки. Могут ли все четыре блохи через некоторое время оказаться на одной прямой?
Ответ. Нет, не могут.
Решение. Предположим, что это случилось, и рассмотрим тот момент, когда все четыре блохи впервые оказались на одной прямой. Попросим ту блоху, которая совершала последний прыжок, прыгнуть обратно. При этом она должна будет снова перелететь через какую-то из других блох вдоль соединяющего ихотрезка, т. е. должна будет остаться на той же прямой. Значит, секунду назад все блохи тоже сидели на одной прямой! Но мы рассматривали тот момент, когда четыре блохи впервые оказались на одной прямой. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно и все четыре блохи не могли оказаться на одной прямой.
Замечание. Другой, более сложный способ решения задачи можно получить, если ввести систему координат, в которой вершины исходного квадрата имеют координаты (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1), и разделить все целочисленные точки на четыре типа: те, у которых обе координаты чётны: (Ч; Ч), те, у которых обе нечётны: (Н; Н), и те, у которых чётна только одна из координат: (Ч; Н) и (Н; Ч). Можно точки каждого типа покрасить в свой цвет.
Заметим, что при каждом прыжке обе координаты прыгнувшей блохи меняются на чётное число единиц, т. е. чётность координат не меняется. Четыре вершины квадрата имеют разный тип: (Ч; Ч), (Ч; Н), (Н; Ч) и (Н; Н). Однако можно доказать, что на любой прямой встречаются вершины только двух каких-то типов (например, только (Ч; Н) и (Ч; Ч)). Значит, на каждой прямой могут оказаться максимум две блохи (сидевшие вначале в вершинах тех двух типов, которые присутствуют на прямой). Итак, оказывается, что не только четыре, но и три блохи на одной прямой оказаться не могут.
Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.

- Перебор вариантов, как могут прыгать блохи вначале, с последующим выводом типа «далее не получится» или «видно, что всё становится только хуже» — 0 баллов

- Приведён только ответ («нет, не могут») — 0 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 42.