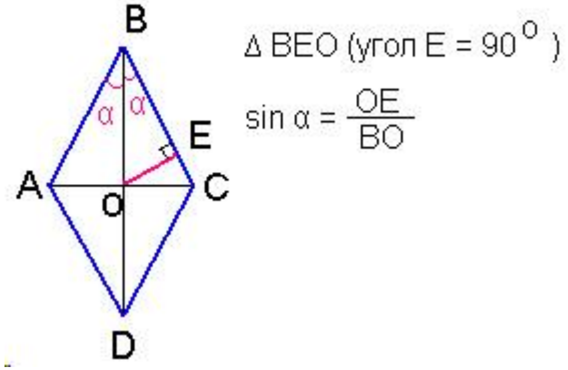
Подготовка к зачету.

Типовая задача № 24.
Задача на вычисление.

№ 1.1 Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.

Пояснения к решению:



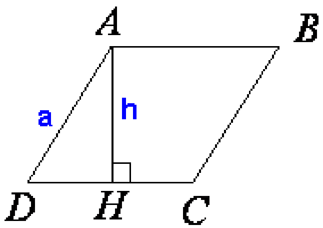
OE=15, BO=30;

Ответ: 60° и 120°

№ 1.2 Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 10, а одна из диагоналей ромба равна 40. Найдите углы ромба.

№ 2.1 Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=12 и CH=3. Найдите высоту ромба.

Пояснения к решению:



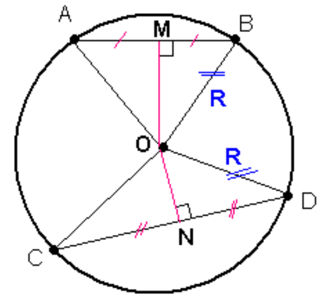
a=AD=DC=BC=AB=15 (ромб); по т. Пифагора h=9

Ответ: 9

№ 2.2 Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=15 и CH=2. Найдите высоту ромба.

№ 3.1 Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB=10, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 5.

Пояснения к решению:



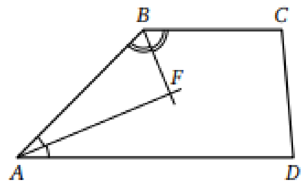
1) OM=12; OA=OB=R; BM=1/2AB=5; по т. Пифагора R=13; 2) ON=5; OC=OD=R=13; по т. Пифагора DN=12; CD=24/

Ответ: 24

№ 3.2 Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB=12, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 8 и 6.

№ 4.1 Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF=24, BF=10.

Пояснения к решению:



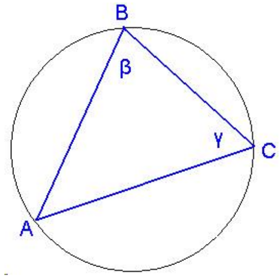
$\angle A + \angle B = 180°$; т.к BF, AF – (делят угол пополам), то $\angle ABF + \angle BAF = 90°; \Rightarrow \angle F = 90°$. По т. Пифагора AB=26.

Ответ: 26

№ 4.2 Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF=16, BF=12.

№ 5.1 Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.

Пояснения к решению:



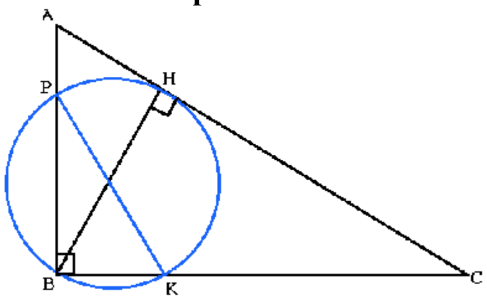
$\angle A = 30°;\ \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R; BC = 2R\sin 30° = 8.$

Ответ: 8

№ 5.2 Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 73° и 77°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 9.

№ 6.1 Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если BH=14.

Пояснения к решению:



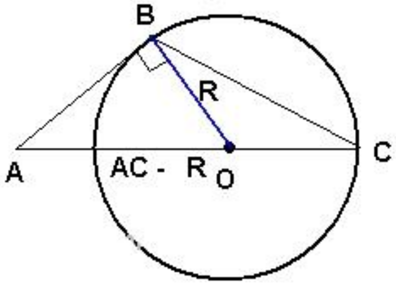
Хорда PK – гипотенуза прямоугольного треугольника $\varDelta PBK$, вписанного в окружность с диаметром BH, следовательно PK – диаметр и PK=BH=14.

Ответ: 14

№ 6.2 Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если BH=13.

№ 7.1 Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если AB=9, AC=12.

Пояснения к решению:



Δ ABO (∠ B = 90) по т. Пифагора

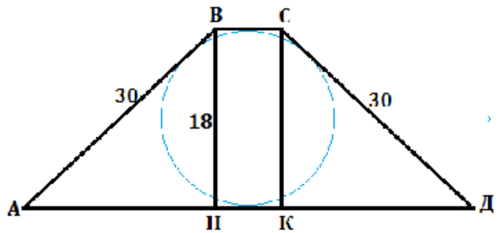
$AO^2 = AB^2 + BO^2$

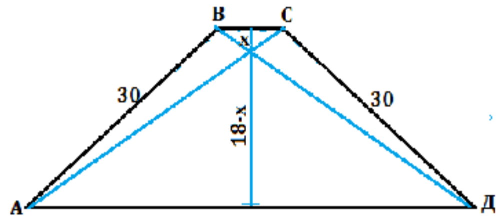
$(AC - R)^2 = AB^2 + R^2$

№ 7.2 Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если AB=3, AC=5.

№ 8.1 В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Пояснения к решению:





1) По рисунку слева.

AB+CD=BC+AD (в ABCD можно вписать окружность),

AB+CD= BC+AD =60 (периметр – 120);

AB=CD=30 (равнобедренная трапеция).

$s = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH; 540 = \frac{60}{2} \cdot BH; BH = 18.$

По т. Пифагора AH=24, т.к. трапеция р/б, то AH=KD=24,

HK=BC=(60-48):2=6 (т.к. BC+AD =60, доказано выше); AD=54.

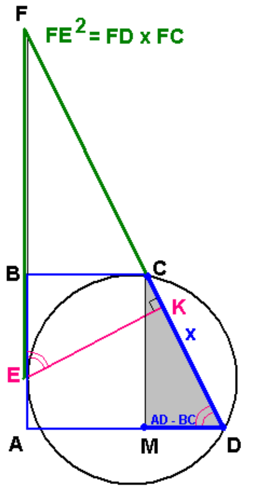
2) По рисунку справа $\varDelta AOD \sim \varDelta BOC$, составляем отношение

$\frac{BC}{AD} = \frac{x}{18-x} = \frac{6}{54}$. **Ответ:** 1,8.

№ 8.2 В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 1500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

№ 9.1 В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если AD=16, BC=15.

Пояснения к решению: По теореме о касательной и секущей.



AD=16, BC=15
MD = 16 – 15 = 1

ΔCDM ∞ ΔFCB
MD : BC = CD : FC
1 : 15 = x : FC
FC = 15x

FE^2 = FD · FC
FE^2 = (FC + CD) · FC
FE^2 = 16x · x
FE = 4 x

ΔFKE (∠K = 90⁰)
EK = FE · cos E = FE · cos D = = FE · MD/CD = 4 x · 1/x = 4

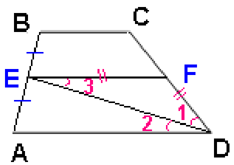
Ответ: 4

№ 9.2 В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если AD=14, BC=7.

№ 10.1 Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пояснения к решению:

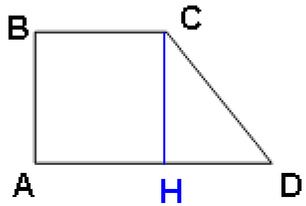
1 часть решения.



$EF = \frac{BC+AD}{2}$ – средняя линия трапеции;

$\angle 1 = \angle 2$ (ED – биссектриса); $\angle 2 = \angle 3$ (накрест лежащие при $EF \parallel AD$ и секущей ED); следовательно $\angle 1 = \angle 3$ и $\triangle EFD$ – р/б; EF=FD=CD:2=20,5. AD=25 (из формулы нахождения средней линии трапеции).

2 часть решения.



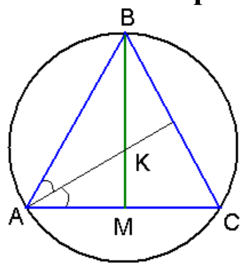
Предположим, что $AB \perp AD$. По теореме, обратной теореме Пифагора получаем $CH^2 + HD^2 = CD^2$. Подставляем числа: CH=AB=40, HD=AD – BC=9, CD=41, получаем верное равенство. Предположение верно, следовательно AB=40 – высота. Находим площадь по формуле.

Ответ: 820

№ 10.2 Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 24 и 25, а основание BC равно 9. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

№ 11.1 В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5:3, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=8.

Пояснения к решению:



$cos\angle A = \frac{AM}{AB} = \frac{KM}{BK} = \frac{3}{5}$ ($\frac{AM}{AB} = \frac{KM}{BK}$ свойство биссектрисы угла любого треугольника, в данном случае $\triangle$ABM). Из основного тригонометрического тождества $sin^2\angle A + cos^2\angle A = 1$ находим $sin\angle A = \frac{4}{5}$ По т. синусов $\frac{\text{BC}}{sin\angle A} = 2R$, R=5.

Ответ: 5

№ 11.2 В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5:4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=18.