ПЛАНИМЕТРИЯ. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Треугольники.

Признаки равенства треугольников:

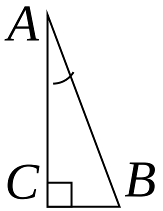
1) по двум сторонам и углу между ними; 2) по стороне и двум прилежащим к ней углам; 3) по трем сторонам.

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

1) по двум катетам; 2) по катету и гипотенузе; 3) по гипотенузе и острому углу; 4) по катету и острому углу.

Свойства прямоугольного треугольника: 1) сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°; 2) катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы.

Соотношения в прямоугольном треугольнике.



$$\sin A = \frac{BC}{AB} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$tgA = \frac{BC}{AC} \qquad ctgA = \frac{AC}{BC}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α, град	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

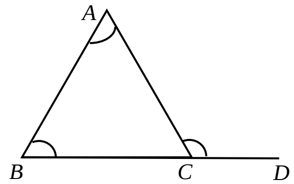
Замечание. $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$; $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$

Теорема Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Свойства углов в треугольнике:

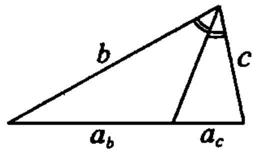
1) сумма внутренних углов треугольника равна 180°;

2) внешний угол треугольника равен сумме двух углов не смежных с ним.



$\angle BCD$ внешний угол ΔABC

$\angle BCD = \angle ABC + \angle BAC$



Свойство биссектрисы угла треугольника: Пусть сторона a делится биссектрисой угла A на отрезки a_b и a_c, прилежащие к сторонам b и c соответственно (см. рисунок). Справедливо следующее соотношение: $\frac{a_b}{b_c} = \frac{b}{c}$.

Равнобедренный треугольник:

1) углы при основании равны;

2) медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

Средняя линия треугольника:

1) отрезок соединяющий середины двух сторон треугольника называется средней линией треугольника;

2) средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна ее половине.

Равносторонний треугольник: в равностороннем треугольнике все стороны и углы равны.

Замечательные точки треугольника.

1) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

2) Серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

3) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

4) Прямые содержащие высоты треугольника пересекаются в одной точке.

5) Середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром окружности, описанной около него.

6) Гипотенуза равна диаметру окружности, описанной около него.

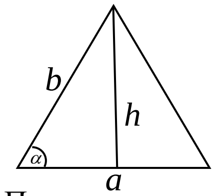
Площадь треугольника:

1) площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту;

2) площадь треугольника равна половине произведения его двух сторон на синус угла между ними;

3) площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов;

4) площади подобных треугольников относятся как коэффициент подобия в квадрате.



$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

5) Площадь треугольника может быть вычислена также по формулам:

$S = pr$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр $\triangle ABC$;

$S = \frac{abc}{4R}$;

$S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ (формула Герона).

Признаки подобия треугольников.

Теорема. Для подобия двух треугольников необходимо и достаточно выполнение любого из условий:

1) два угла одного треугольника равны двум углам другого;

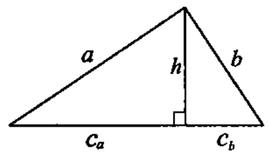
2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы треугольников, заключённые между этими сторонами, равны;

3) все три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого.

Коэффициент подобия k показывает во сколько раз длины сторон одного треугольника больше или меньше измерений другого треугольника, углы при этом остаются равны.

Важное свойство подобных фигур: отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия: $\frac{S_2}{S_1} = k^2$.

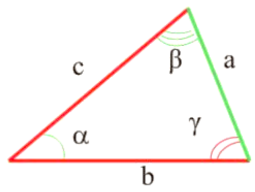
Пусть c_a, c_b - отрезки, на которые гипотенуза делится основанием высоты (см. рисунок). Имеют место следующие отношения:



$$a^2 = c_a \cdot c, \qquad b^2 = c_b \cdot c, \qquad h^2 = c_a \cdot c_b.$$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$



Длина медианы треугольника к стороне a равна:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Длина биссектрисы треугольника к стороне a равна:

$$l_a = \sqrt{b\cdot c - a_b\cdot a_c}\,.$$

Правильный треугольник.

Пусть a – сторона правильного треугольника. Отметим следующие легко вычисляемые соотношения, которые полезно помнить наизусть, чтобы не проводить эти вычисления каждый раз:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad r = \frac{R}{2}.$$

Четырехугольники.

Сумма углов четырехугольника равна 360°.

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

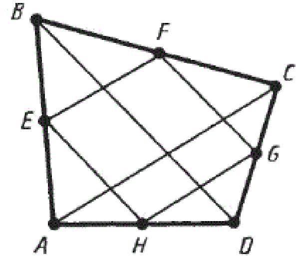
Свойства параллелограмма:

1) диагональ разбивает его на два равных треугольника;

2) противоположные стороны и углы попарно равны;

3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Свойство середин сторон четырехугольника: середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырехугольника.



$ABCD$ – четырехугольник, точки $EFGH$ середины его сторон, тогда $EFGH$ – параллелограмм.

Если $S_{ABCD} = a$, то $S_{EFGH} = \frac{a}{2}$.

Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые, равны 90°. Свойство прямоугольника: 1) диагонали равны.

Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны.

Свойства ромба:

1) диагонали взаимно перпендикулярны;

2) диагонали являются биссектрисами углов.

Квадрат – прямоугольник, у которого все стороны равны.

Свойства квадрата:

1) диагонали равны и взаимно перпендикулярны;

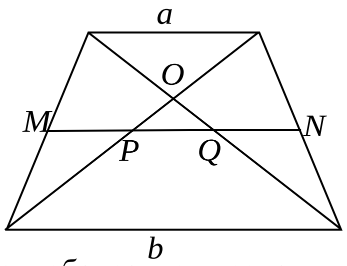
2) диагонали делят углы пополам.

Трапеция – четырехугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие противоположные стороны (боковые) нет

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Ее свойства:

1) средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна половине их суммы;

2) отрезок соединяющий середины диагоналей трапеции равен половине разности оснований.



$MN - средняя\ \ линия$

$$MN = \frac{a+b}{2};$$

$$PQ = \frac{b-a}{2}.$$

Равнобедренная трапеция – это трапеция, у которой боковые стороны равны.

Свойства равнобедренной трапеции:

1) углы при основании равны;

2) диагонали равны.

Площади.

Свойства площадей многоугольников:

1) равные фигуры имеют равные площади;

2) если многоугольник состоит из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Площади фигур:

1) площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту;

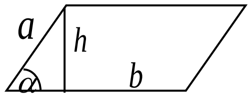
2) площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними;

3) площадь прямоугольника равна произведению его двух смежных сторон;

4) площадь квадрата равна квадрату его стороны;

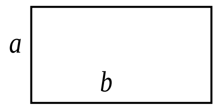
5) площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Замечание: если диагонали четырехугольника (любого) взаимно перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения его диагоналей.



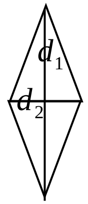
Параллелограмм

$S = bh = ab\sin\alpha$



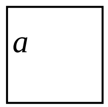
Прямоугольник

$S = ab$



Ромб

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



Квадрат

$S = a^2$

Площадь любого выпуклого четырехугольника может быть вычислена по формуле: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$

где d_1, d_2 – диагонали четырёхугольника, α – угол между ними.

Решение простейших задач в координатах.

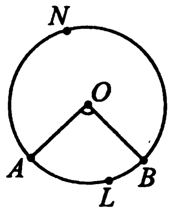
1) Пусть $A(x_1; y_1)B(x_2; y_2)$, тогда длина $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2) Пусть O – середина отрезка AB, тогда $O\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Окружность. Центральные и вписанные углы.

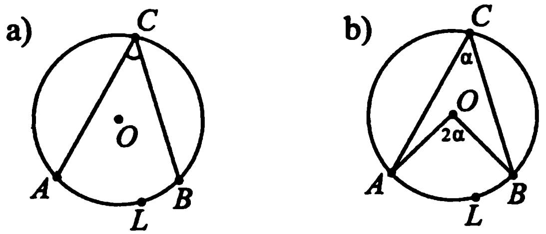
Длина окружности равна: $l = 2\pi r$, площадь круга – $S = \pi r^2$.

На рисунке углы $\angle AOB$, соответствующие дугам ALB и ANB, называются центральными, но градусная мера угла $\angle AOB$, соответствующего дуге ANB больше 180°.



Градусная мера дуги и соответствующего ей центрального угла по определению равны.

Если точки A, B, C, L принадлежат окружности, причем точка L расположена внутри угла ABC (см. рисунок a), то угол ACB называется вписанным углом, опирающимся на дугу ALB.



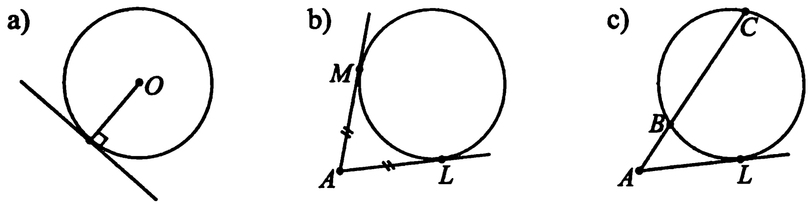
Теорема. Если центральный угол AOB соответствует дуге ALB, а вписанный угол ACB опирается на эту же дугу, то $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ (см. рисунок b).

Касательная к окружности.

1) Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной (рисунок a).

2) Отрезки касательных AL и AM, проведенных к окружности, равны: $AL = AM$ (рисунок b).

3) Квадрат отрезка касательной равен произведению длины секущей на ее внешнюю часть: $AL^2 = AB \cdot AM$ (рисунок c).



Вписанные и описанные четырехугольники.

1) Для того, чтобы вокруг четырехугольника ABCD можно было описать окружность, необходимо и достаточно выполнение любого из условий:

1) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$ (суммы противоположных углов четырёхугольника равны 180°);

2) $\angle ABD = \angle ACD$ (углы B и C, опирающиеся на отрезок AD, равны).

2) Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны:

$AB + CD = BC + AD$.